

SPEKTRAL KÜTÜPHANELER KULLANARAK HİPERSPEKTRAL VERİLERİN SEYREK AYRIŞTIRILMASI

S. Küçük*, S. E. Yüksel

Hacettepe Üniversitesi, Elektrik ve Elektronik Mühendisliği, 06800 Ankara, Türkiye - (skucuk, eyuksel)@ee.hacettepe.edu.tr

ANAHTAR KELİMELER: Hiperspektral Görüntüleme, Hiperspektral Ayrıştırma, Seyrek Bağlanım, Seyrek Ayrıştırma, Spektral Kütüphane

ÖZET:

Materyallerden yansıyan enerjinin değişimi ölçülerek elden edilen hiperspektral görüntülerde, mekansal çözünürlüğün düşük olması piksel içerisinde birden fazla materyalin katışım halinde bulunma ihtimalini doğurmaktadır. Son yıllarda, spektral kütüphanelerin farklı türde birçok malzemeye ait spektral bilgi sunması, hiperspektral katışım problemini yarı-denetimli bir şekilde çözecek yöntemlerin gelişmesine olanak sağlamıştır. Seyrek bağlanım teknikleri olarak adlandırılan bu yöntemler, katışım piksellerinin, var olan spektral kütüphaneler içerisindeki malzemelere ait spektral imzaların seyrek bir doğrusal birleşimi halinde olduklarını varsayar ve bunların katışım oranlarının kestirilmesini sağlar. Bu bildiride, spektral kütüphanelerin sunmuş olduğu çok sayıda spektral imza sayesinde, spektral katışım problemi seyrek ayrıştırma yöntemleri ile çözülmüştür. Spektral kütüphane olarak Amerika Birleşik Devletleri Jeoloji Araştırmaları Kurumu kütüphanesi kullanılmıştır. Dışbükey - gevşeme tabanlı seyrek bağlanım yöntemleri kullanılarak katışım halinde olan piksellerin kütüphanedeki hangi malzeme imzaları ile hangi oranlarda karıştığının karşılaştırılmalı analizleri yapılmıştır. Karşılaştırma ölçütü olarak Kök Ortalama Kare Hata, Yeniden Yapılanma Sinyal Hatası ve algoritmaların katışım piksellerini çözümlerken geçen süreler kullanılmıştır. Ayrıca seyrek bağlanım yöntemlerinin kütüphane içerisinde buldukları son elemanları ve bu elemanların bolluk değerlerini görselleştirmek için Hinton diyagramları kullanılmıştır.

UNMIXING OF HYPERSPECTRAL DATA USING SPECTRAL LIBRARIES

KEY WORDS: Hyperspectral Imaging, Hyperspectral Unmixing, Sparse Regression, Sparse Unmixing, Spectral Library

ABSTRACT:

In hyperspectral images, the pixels are found as a mixture of the spectral signatures of several materials, especially at insufficient spatial resolution. In recent years, spectral libraries have provided hundreds of spectral information of many different types of materials that allow the development of techniques to solve the problem of hyperspectral unmixing in a semi-supervised fashion. These methods which are also known as sparse regression techniques assume that the mixed pixels are a sparse linear combination of spectral signatures of materials in already available spectral libraries. In this paper, spectral mixing problem has been solved via sparse separation methods. The United States Geological Survey (USGS) spectral library was used to generate simulated hyperspectral data. Comparative analysis is performed to determine which material signatures in the library are mixed in the pixels by using the convex-relaxation based sparse regression methods. Root Mean Square Error (RMSE), Signal to Reconstruction Error (SRE) and elapsed time of the algorithms are used as comparing criterions. Moreover, Hinton diagrams were used to visualize which material signatures are found in the library and the proportions of these found material signatures.

1. GİRİŞ

Uzaktan algılama, yüzey materyallerinden yansıyan veya yayılan enerjinin ölçümünü esas alan bir teknolojidir. Bu teknolojilerden biri olan hiperspektral görüntüleme sistemleri, dar ve bitişik yüzlerce dalga boyu bandında ölçüm alabilmektedir. Hiperspektral görüntüler materyallerden yansıyan veya yayılan enerjinin dalga boylarına göre değişimini ölçen cihazlarla elde edilir. Materyallerin her bir dalga boyunda sahip olduğu spektral bilgi, spektral imza adı verilen materyallerin tanımlanması ve sınıflandırılmasını sağlayan örüntüler oluşturur (Küçük, 2015).

Sayısal ortamda elde edilen görüntülerde piksellerin fiziksel

dünyada kapladıkları alan mekansal çözünürlük olarak adlandırılmaktadır. Hiperspektral görüntüler yüksek çözünürlükte spektral bilgi sağlarken özellikle uydu platformlarından elde edilen verilerde düşük mekansal çözünürlük söz konusu olabilmektedir. Mekansal çözünürlüğü düşük bir hiperspektral görüntüdeki bir piksel içerisinde, birden fazla materyal katışım halinde bulunabilir. Bu durum, literatürde katışım problemi olarak adlandırılır (Keshava ve Mustard, 2002). Katışım halinde bulunan malzemelerin bulunması işlemine son eleman analizi, bu malzemelerin hangi oranda karıştığının bulunması işlemine ise bolluk oranı veya katışım oranı analizi denilmektedir. Spektral ayrıştırma yöntemleri olarak da adlandırılan analiz yöntemleri doğrusal ve

doğrusal olmayan modellerle modellenmektedir (Keshava ve Mustard, 2002) (Bioucas-Dias vd., 2012) (Heylen vd., 2014).

Doğrusal Katılım Modeli (DKM) piksellerin, son elemanların bolluk değerleri ile ağırlandırılmış toplamından oluştuğunu varsayar. Nesnelere yansıyan hiperspektral sensöre gelen ışığın, nesnelere yüzey alanları ile orantılı olduğu varsayımında bulunur. Işığın sensöre gelmeden önce çevreyle olan etkileşimleri, yani çevrenin etkisiyle oluşan çoklu saçılmalar dikkate alınmaz. Doğrusal olmayan modeller ise ışığın malzemeler arası etkileşimini de hesaba katarak katılım probleminin çözümü üretmeye çalışır. Doğrusal olmayan modeller çoğu durumda görüntülen sahneyi oluşturan materyallerin fiziksel özellikleri hakkında önsel bilgilere ihtiyaç duyar (Iordache vd., 2011). Doğrusal modelin hesaplamasal takip edilebilirliği ve esnekliği, spektral katılım problemlerinde doğrusal olmayan modellemelere göre tercih edilme sebepleridir.

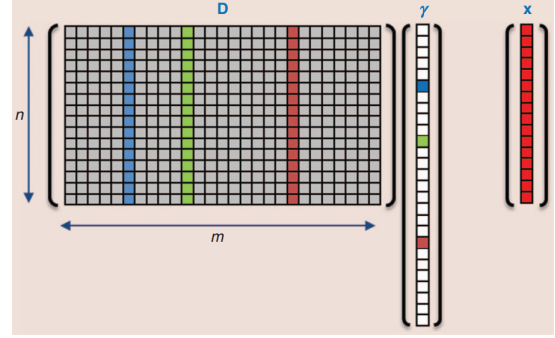
Literatürde, DKM'yi kullanan spektral ayrıştırma yöntemlerinin birçoğu dışbükey geometri tabanlı yöntemlerdir. Dışbükey geometri tabanlı yöntemlerin bir simpleksi içerisinde dağıldığını varsayar. Dışbükey geometri tabanlı yaklaşımların çoğu verilerin saf piksel içerdiği varsayımında bulunur. Zirve Bileşen Analizi (Vertex Component Analysis) (Nascimento ve Dias, 2005), Piksel Saflık İndeksi (Pixel Purity Index) (Boardman vd., 1995), N-FINDER (Winter, 1999) verilerin saf piksel içerdiği varsayımında bulunan en popüler yöntemlerdir. Bu yöntemler hesaplama maliyeti açısından verimlidir ve veri kümeleri içerisinde en saf pikselleri bulmayı amaçlar. Ancak veri kümelerinin büyük bir çoğunluğu saf piksel bulundurmadığı için bu yöntemlerin kullanımı gerçeğe uygun olmamaktadır. Dışbükey tabanlı yöntemlerin ikinci yaklaşımı, bütün veriyi çevreleyen en küçük hacimli simpleksi bulmaktır. Yinelemeli Kısıtlı Son elemanlar - Iterated Constrained Endmembers (ICE) (Berman vd., 2004), Seyreklik Teşvik eden ICE (SPICE) (Zare ve Gader, 2007), genişletilmiş versiyonu (Yüksel vd., 2016) ve En küçük Hacimli Simpleks Analizi (Minimum Volume Simplex Analysis) (Li ve Bioucas-Dias, 2008) veri kümelerinin kendisinden saf son elemanları çıkarmaya yarayan bazı yöntemlerdir. Katılım verileri içerisinde bulunan son elemanlar simpleksin köşelerini oluşturuyorsa, diğer bir ifadeyle veride yüksek dereceden katılım (highly mixed) söz konusu ise bu yöntemler sahte son eleman imzaları üretmektedir (Iordache vd., 2011) (Akhtar vd., 2015). Dışbükey geometri tabanlı yöntemlerin bahsedilen eksiklikleri, spektral ayrıştırma probleminin Seyrek Yaklaşım - SY problemi olarak ele alınmasına vesile olmuştur. SY'de spektral ayrıştırma için spektrometre ile laboratuvar ortamında toplanan malzemelere ait spektral imzaları içeren kütüphaneler kullanılmaktadır. Seyrek bağlantı teknikleri olarak adlandırılan yöntemler, katılım piksellerini kütüphane içerisindeki spektral imzaların çok azının doğrusal bir birleşimi olduğunu varsayar ve bu imzaların hangi oranda karıştığını kestirilmesini sağlar (Iordache vd., 2011) (Akhtar vd., 2015) (Iordache vd., 2014).

Seyrek bağlantı teknikleri seyrek gösterim kuramından üretilmiştir. Seyrek gösterim kuramının temelleri Bölüm 2'de detaylı bir şekilde anlatılmıştır. Bildirinin diğer bölümlerinin düzenlemesi ise şöyledir: Bölüm 3'te DKM ve seyrek spektral ayrıştırma için DKM'den türetilen model verilmiştir. Bölüm 4'te yapılan çalışmalar gösterilmiştir. Bölüm 5'te ise sonuçların genel bir değerlendirilmesi yapılmıştır.

2. SEYREK GÖSTERİM KURAMI

Seyrek gösterim kuramı esas itibarıyla, son yılların popüler konulardan biri olan Sıkıştırılmış Algılama - SA ile ilgilidir. İşaret işleme, görüntü işleme, makine öğrenmesi ve bilgisayarlı görü olmak üzere geniş bir uygulama alanında çözümler sunmaktadır (Zhang vd., 2015). Seyrek modellemede bir $x \in \mathbb{R}^n$ işareti, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sözlüğü ile az sayıda sıfırdan farklı girdileri olan $\gamma \in \mathbb{R}^m$ seyrek gösterim vektörünün doğrusal birleşimi olarak modellenir.

İşaretlerin seyrek gösterilmesini sağlayan sistem modeli Şekil 1'de gösterilmektedir. Modelin en önemli parçası ölçüm matrisi olarak da adlandırılan \mathbf{D} sözlüğüdür. Sözlüğün her bir sütunu *atom* olarak adlandırılır. \mathbf{D} sözlüğü toplam m tane atomdan oluşur ve atomlar $\{d_j\}_{j=1}^m$ şeklinde gösterilir. Seyrek gösterim vektörü γ , az sayıda sıfırdan farklı değerleri (L tane) olan seyrek vektördür. Şekil 1'de verilen modelde γ vektörünün seyreklik derecesi $L = 3$ 'tür. Seyreklik gösterimi yapılan x işareti, seyrek gösterim vektörü γ 'nın sıfır olmayan elemanlarına karşılık gelen sözlük atomlarının doğrusal birleşiminden oluşmaktadır.



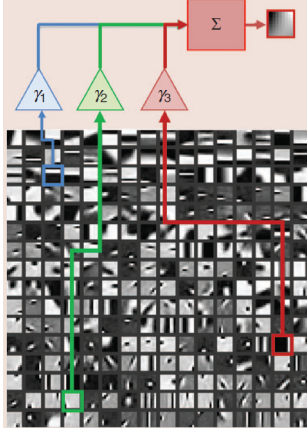
Şekil 1. Seyreklik modeli. Model $\mathbf{D}\gamma = x$ olacak şekilde x işaretini modeller (Pappayan vd., 2018).

\mathbf{D} sözlüğü, çoğu durumda $m \gg n$ olacak şekilde tasarlanır. Örnek olarak Şekil 2'de, \mathbf{D} sözlüğünün oluşmasını sağlayan aynı boyutlara sahip (8×8 piksel) 256 farklı atom gösterilmektedir. Sözlük tasarlanırken sözlüğün atomlarını oluşturacak her bir parça vektör haline getirilir.

Şekil 2'deki örnek için atomlar $n = 64$ uzunluğundaki vektörlerden oluşmuştur. Toplam atom sayısının atom boyutundan büyük olduğu durumlar için ($m = 256 \gg n = 64$) oluşturulan sözlükler aşırı-tam (over-complete) sözlük olarak adlandırılmaktadır. Bir x işaretini, aşırı-tam sözlük ve seyrek gösterim vektörü vasıtasıyla üretecek olan seyrek modelin cebirsel ifadesi (1)'de tanımlandığı gibidir.

$$x = \mathbf{D}\gamma \quad (1)$$

Denklem (1), doğrusal cebir gözüyle bakıldığında eksik belirtilmiş (under-determined) bir doğrusal sistem eşitliğidir. \mathbf{D} sözlüğü ve x ölçüm vektörü bilindiğinde, γ vektörü *sözde ters* (pseudo-inverse) yöntemi ile bulunabilir. Ancak sözde-ters yöntemi kullanıldığında çözüm hem tek olmayacak hem de yoğun çözüm (dense solution) içerecektir. Bu durumda seyrek modelin isteği, γ vektörünün çok az sayıda girdisinin sıfırdan farklı değerde olma koşulu sağlanamayacaktır. Seyrek gösterim çözümü, (1)'e l_0 normunu minimize etme şartı eklenerek sağlanabilir (Elad, 2010). Seyrek modelin cebirsel ifadesi l_0



Şekil 2. Bir görüntü parçasının üç farklı sözlük atomu kullanılarak elde edilmesi (Pappyan vd., 2018).

normunun eklenmesiyle (2)'de verilen optimizasyon problemi halini alır.

$$\min_{\gamma} \|\gamma\|_0 \quad \text{s.t.} \quad x = \mathbf{D}\gamma \quad (2)$$

Burada $\|\gamma\|_0$, γ vektörünün l_0 normunu ifade etmektedir. Seyreklik ölçütü olarak kullanılan $l_0 = \|\cdot\|$ normu, vektör içindeki sıfırdan farklı girdilerin sayısını vermektedir. Denklem (2)'de verilen problem, \mathbf{D} sözlüğünden gelecek olan atomların doğrusal bir birleşimi olarak x işaretinin en seyrek şekilde oluşmasını amaçlar. Bu problemin bir diğer yorumu, bir x işareti verildiğinde onu en seyrek şekilde oluşturacak sözlük atomlarını bulmaktır. Ancak denklemde verilen şartları sağlayacak sözlük atomlarının bulunması çok zor bir hesaplama gerektirebilir. Örneğin; 2000 atom içeren bir sözlüğün 15 atomundan oluşan bir x işaretini düşünelim. Bu işaretin sözlüğün hangi atomlarından oluştuğunu tespit etmek için 2000 atomun bütün 15^1 ihtimallerinin, yani yaklaşık $2.4e + 37$ tane ihtimalin dikkate alınması gerekebilir. Her bir işlem süresi 1 ps olsa bile bu işlemin bitiş süresi milyarlarca yıl gerektirir. Bu durum, NP - Zor (Non-deterministic Polynomial time - Hard) problem olarak ifade edilmektedir (Pappyan vd., 2018). Kesin bir sonuca ulaşmak yerine, (2)'deki probleme yaklaşık çözümler elde edilmeye çalışılır. Literatürde, yaklaşık çözümü bulan çeşitli yöntemler mevcuttur. Eşleme Takip - Matching Pursuit algoritması (Zhang vd., 2015) (Mallat ve Zhang, 1993), Dik Eşleşme Takip - Orthogonal Matching Pursuit algoritması (Zhang vd., 2015) (Elad, 2010) (Pati vd., 1993), Temel Takip - Basis Pursuit algoritması (Zhang vd., 2015) (Chen vd., 2001) en bilindik olanlarıdır. Bu yöntemler alt bölümlerde sırasıyla anlatılmıştır.

2.1 Eşleme Takip Algoritması

Eşleme Takip Algoritması (ETA) iteratif açgözlü (greedy) bir algoritmadır. Her bir iterasyonda seyrek yaklaşım sağlayacak tek bir sözlük atomunu bulmayı amaçlar. Algoritmanın nasıl çalıştığı iki adımda özetlenmiştir:

- Atom seçme adımı
İlk adım olarak işaret ile en iyi eşleme yapacak atomu bulmaktır. Bu işlem öncesinde sözlük atomları normalize edilir. En iyi eşleme yapacak atom, işaret ile sözlük atomların iç çarpımları alınarak yapılır. Bu işlemin amacı, işaret ile en çok benzerlik gösteren atomu bulmaktır. En büyük iç çarpımı sağlayan atom en iyi eşleme yapan atom

olarak belirlenir. Yapılan işlemlerin cebirsel ifadesi (3)'te verilmiştir.

$$d^k = \max_{\{d_j\}} \left| \langle r^{k-1}, d_j \rangle \right|, \quad 1 \leq j \leq m \quad (3)$$

Burada d_j sözlüğün j . atomunu, r artık (residual) işareti, $\langle \cdot \rangle$ iç çarpımı göstermektedir. İlk adımda $r^0 = x$ olarak alınır. İç çarpım sonucunda elde edilen skaler değer, $\gamma^k = \langle r^{k-1}, d^k \rangle$ belirlenen d^k atomu için katsayı değeri olarak hesaplanır. Algoritma sonlandığında x işaretini oluşturabilmek için d^k, γ^k çifti hafızada tutulur.

- Artık işaretin güncellenme adımı
İlk adımda bulunan atomun ağırlıklı değeri işareten çıkarılarak artık bir işaret elde edilir. Elde edilen artık işaret üzerinden ilk adım tekrarlanır. Belirli bir durdurma koşulu sağlanıncaya kadar bu adım tekrar edilir. Durdurma koşulu olarak genellikle artık işaretin normunun belirli bir eşik değerinin altına düşmesi olarak belirlenir.

Algoritma sonlandığında hafızada tutulan d^k, γ^k çiftleri kullanılarak yaklaşık \hat{x} işareti aşağıdaki cebirsel ifadeyle elde edilir.

$$\hat{x} = \sum_{j=1}^k \gamma^j d^j \quad (4)$$

ETA oldukça basit ve anlaşılır bir algoritmadır. Ancak her bir iterasyonda bütün sözlük atomları tarandığı için işlem yükü gerektirir.

2.2 Dik Eşleme Takip Algoritması

Dik Eşleme Takip Algoritması (DETA), ETA gibi seyreklik probleminin yaklaşık çözümünü bulmayı hedefleyen açgözlü bir algoritmadır. DETA'nın ana adımları Algoritma 1'de özetlenmiştir (Zhang vd., 2015). DETA, ETA ile benzer bir prosedür kullanmaktadır. Farklı olarak DETA, her bir iterasyonda artık işareti, o iterasyona kadar seçilen tüm atomların dağıtıldığı alt uzaya yansır. Bu farklılaşma Algoritma 1'de verilen 2. adımdan sonra meydana gelmektedir.

2.3 Temel Takip Algoritması

Temel Takip Algoritması (TTA) açgözlü algoritmalarından farklı olarak, seyrek vektörün kestiriminde (2)'de kullanılan l_0

Algorithm 1 Dik Eşleme Takip Algoritması

Amaç: Seyreklik problemine yaklaşık çözüm bulma $\leftarrow \min_{\gamma} \|\gamma\|_0 \quad \text{s.t.} \quad x = \mathbf{D}\gamma$

Girdi: Ölçüm vektörü x , Sözlük \mathbf{D}

İklendirme: $k = 1, r_0 = x, \gamma = 0, \mathbf{S}_0 = \emptyset$, indeks kümesi $\Lambda_0 = \emptyset$. Burada \emptyset boş kümeyi göstermektedir, τ eşik değerdir

while $\|r_k\| > \tau$ **do**

Adım 1: En iyi eşleme yapacak sözlük atomunu bul.

$$\lambda_k = \max_{j \notin \Lambda_{k-1}} \left| \langle r_{k-1}, d_j \rangle \right|$$

Adım 2: İndeks kümesini $\Lambda_k = \Lambda_{k-1} \cup \lambda_k$ ve veri kümesini $\mathbf{S}_k = [\mathbf{S}_{k-1}, d_{\lambda_k}]$ güncelle.

Adım 3: Seyrek katsayıları sözde-ters yöntemi kullanarak hesapla.

$$\hat{\gamma} = \min \|x - \mathbf{S}_k \hat{\gamma}\|_2^2$$

Adım 4: Artık işareti güncelle $r_k = x - \mathbf{S}_k \hat{\gamma}$.

$k = k + 1$

end while

Çıktı: \mathbf{S}, γ

normunun yerine l_1 normunu kullanmaktadır. Bu değişiklik (2) üzerinde bir gevşeme sağlamaktadır. Literatürde bu tür yöntemler, gevşeme yöntemleri (relaxation methods) olarak adlandırılmaktadır. TTA bu değişiklikle, (5)'te cebirsel ifadesi verilen problemi çözmeye çalışır.

$$\min_{\gamma} \|\gamma\|_1 \quad \text{s.t.} \quad x = \mathbf{D}\gamma \quad (5)$$

Denklem (5) dışbükey optimizasyon problemine dönüştürülmüş bir eşitlik ve doğrusal programlama algoritmaları ile çözülebilmektedir. Denklem (5)'in gürültü eklenmiş formunun çözümü için yeni hali, (6)'da verildiği şekli ile de yazılabilir.

$$\min_{\gamma} \|x - \mathbf{D}\gamma\|_2^2 + \lambda \|\gamma\|_1 \quad (6)$$

Burada λ , sıfırdan farklı eleman değerleri üzerinde seyrekliğin artmasını sağlayan bir ceza terimidir. Denklem (6)'nın ilk terimi daima sıfırdan büyüktür. İkinci terim ise γ vektörünün girdilerinin mutlak değerlerinin toplamıdır ki bu terim de daima sıfırdan büyük olacaktır. Ceza terimi λ büyüdükçe, ikinci terim ilk terime göre daha baskın hale geleceği için problemin minimizasyonu γ değerlerinin sıfıra çekilmesiyle mümkün olacaktır. Böylelikle γ vektörünün seyrek bir şekilde gösterimi sağlanacaktır.

3. DOĞRUSAL KATIŞIM MODELİ

Seyrek yaklaşım problemi olarak ele alınacak hiperspektral katışım problemi, doğrusal katışım modeli ile formülize edilebilmektedir. Doğrusal katışım modeli, bir bantta katışım halinde bulunan spektral tepkinin, o banttaki son elemanların doğrusal bir bileşiminden oluştuğunu varsayar. Cebirsel olarak

$$x_i = \sum_{j=1}^m e_{ij} p_j + \epsilon_i \quad (7)$$

şeklinde ifade edilir. Burada x_i , i . bantta ölçülen spektral yansıma, m katışım pikselindeki toplam son eleman sayısı, e_{ij} i . banttaki j . son elemanın yansıma değeri, p_j j . son elemana ait bolluk değeri ve ϵ_i ölçüm hatasıdır. Hiperspektral veri küpünün n spektral kanal içerdiği varsayıldığında, modelimiz matris formunda aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$x = \mathbf{E}p + \epsilon \quad (8)$$

Burada $x \in \mathbb{R}^n$ bir pikselde ölçülen yansımayı göstermektedir. $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ son elemanları içeren bir matris, $p \in \mathbb{R}^m$ son elemanların bolluk değerlerini içeren vektör ve $\epsilon \in \mathbb{R}^n$ hata vektörüdür. Doğrusal katışım modelinde bolluk değerleri için iki kısıt vardır (Keshava ve Mustard, 2002) (Bioucas-Dias vd., 2012). Bunlardan ilki katışım oranlarının negatif olmaması, ikincisi ise toplamının 1'e eşit olmasıdır.

$$p > 0 \quad (9)$$

$$\mathbf{1}^T p = 1 \quad (10)$$

Doğrusal katışım modeli, malzemelerden yansıyarak sensöre gelen ışığın malzemelerin yüzey alanları ile orantılı olduğunu varsaydığı için bu kısıtlar konulmaktadır.

3.1 Seyrek Spektral Ayırıştırma

Bölüm 2'nin alt bölümlerinde bahsedilen seyrek yaklaşım yöntemleri, doğrusal katışım modeline uyacak şekilde düzenlendiğinde, spektral ayırıştırma için de kullanılabilir. Materyallerin spektral imzalarını içeren kütüphaneler ile oluşturulacak $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ($m \gg n$) sözlüğü, bir katışım pikselinde bulunabilecek bütün son eleman imzalarını içerdiği varsayıldığında, x katışım halinde bulunan işaret aşağıdaki gibi elde edilir:

$$x = \mathbf{D}\gamma + \epsilon \quad (11)$$

Burada $\gamma \in \mathbb{R}^m$, çok az sayıda sıfırdan farklı girdisi olan ($p \ll m$) seyrek bolluk vektörüdür. Denklem (11)'e doğrusal katışım modelinin kısıtları eklendiğinde

$$\min_{\gamma} \|\gamma\|_0 \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{D}\gamma - x\|_2 \leq \eta, \quad \gamma > 0, \quad \mathbf{1}^T \gamma = 1 \quad (12)$$

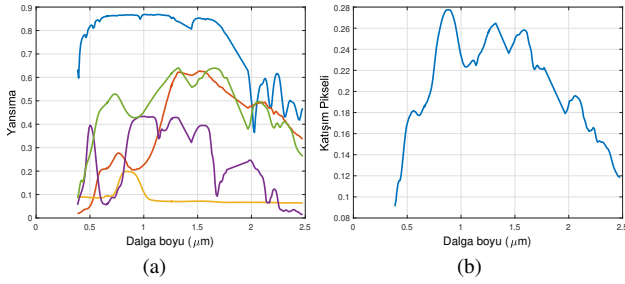
halini alır. Burada η modellemeden kaynaklanabilecek hata toleransını ifade etmektedir. Denklem (12), ağırlıklı seyrek yaklaşım algoritmaları ile çözülebilmektedir (Akhtar vd., 2015) (Iordache vd., 2011) (Toker ve Yüksel, 2018). Minimizasyon probleminin gevşetilmiş, yani l_0 normu yerine l_1 normu kullanılarak dışbükeyleştirilen hali de literatürde genişçe araştırılmıştır. Çoğu yöntem (6)'ya doğrusal katışım modelinin kısıtlarını ekleyerek seyrek bağlanım problemini çözmeye çalışır. Dias ve Figueiredo, (6)'da verilen problemi çözmek için Değişken Bölünme ve Artırılmış Lagrangian ile Spektral Ayırıştırma (Spectral Unmixing by variable Splitting and Augmented Lagrangian - SUnSAL) algoritmasını üretmişlerdir (Bioucas-Dias ve Figueiredo, 2010). Aynı çalışmada hiperspektral katışım problemini çözmek için ise algoritmanın kısıtlı haline uyumlu Sınırlı - SUnSAL (Constrained - SUnSAL - CSUnSAL) algoritması geliştirilmiştir. Hem SUnSAL hem de CSUnSAL seyrek ayırıştırma için Çarpanların Dönüşümlü Yön Yöntemini (Alternating Direction Method of Multipliers - ADMM) kullanmaktadır. SUnSAL'ın geliştirilmiş bir hali, İşbirlikçi - SUnSAL (Collaborative - CLSUnSAL) da eş zamanlı bir şekilde bütün katışım piksellerini ayırıştırmaya çalışmaktadır (Iordache vd., 2014).

3.2 Seyrek Spektral Ayırıştırma için Veri Üretimi

Bu çalışmada öncelikle, (11)'de verilen materyallerin spektral imzalarını içerecek \mathbf{D} sözlüğü oluşturulmuştur. Bunun için farklı özelliklerde bitki çeşidi, mineral, organik bileşen, toprak ve kaya parçaları, insan yapımı malzemeler gibi yüzlerce materyalin spektral imzalarını içeren USGS spektral kütüphanesi kullanılmıştır (Kokaly vd., 2017). Spektral imzalar $0.4 - 2.45 \mu m$ dalga boyu aralığında 224 banttan oluşmaktadır. Oluşturulacak sözlüğün gerçek veriler üzerinde uygulanacağı düşünüldükçe bazı dalga boyu bantları atılmış, her bir materyale ait spektraller 188 banda indirilmiştir. USGS kütüphanesi 2000'nin üzerinde spektral imza içermektedir. Katışım probleminde, piksel içerisindeki materyal imzalarının aşırı benzerlik göstermesi spektral ayırıştırma işlemini zorlaştıracığı için \mathbf{D} sözlüğü oluşturulurken olabildiğince farklı materyal imzaları seçilmeye çalışılmıştır. Bunun için (13)'te cebirsel ifadesi verilen *karşılıklı bağdaşım* (mutual coherence) metriği kullanılmıştır.

$$\mu(D) = \max_{i,j;i \neq j} \frac{|d_i^T d_j|}{\|d_i\|_2 \|d_j\|_2} \quad (13)$$

Materyal spektralleri $\mu < 0.997$ olarak seçildiğinde $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{188 \times 454}$ boyutlu sözlüğü oluşturulmuştur. Sözlükten rastgele 5 farklı spektra seçilmiş, (8)'de verilen doğrusal katışım modeli kullanılarak toplam 100 tane yapay katışım pikseli üretilmiştir. Katışım için piksel içerisinde toplamları 1 olacak şekilde Dirichlet dağılımı kullanılarak bolluk değerleri üretilmiştir. Katışım verisi/piksel başına üç farklı seviyede SNR = 25 dB, SNR = 75 dB ve SNR = 125 dB olacak şekilde gürültü eklenmiştir. Şekil 3a'da seçilen materyal imzaları, Şekil 3b'de örnek bir katışım pikselinin spektrası gösterilmektedir.



Şekil 3. USGS kütüphanesinden (a) beş farklı materyale ait spektral imzalar. (b) Seçilen imzaların bir birleşimi olarak elde edilen örnek bir katışım pikseline ait spektra.

4. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bildiriye, Bölüm 3.2'de üretilen sentetik verilerin seyrek ayrıştırılması için Grand ve Boyd'un hazırladığı CVX (*Dışbükey programlama için MATLAB yazılımı*) kullanılmıştır (Grant ve Boyd, 2014). Denklem (6)'ya bolluk değerlerinin kısıtları eklenerek aşağıda verilen denklem elde edilmiştir.

$$\min_{\gamma} \|x - D\gamma\|_2^2 + \lambda \|\gamma\|_1, \quad \gamma > 0, \quad \mathbf{1}^T \gamma = 1 \quad (14)$$

Denklem (14)'ün çözümü için CVX yazılımı içinde sınır kısıtlı enküçük kareler yöntemi (bound-constrained least squares) kullanılmıştır. Ayrıca CVX'in seyrek bağlanım performansı Bölüm 2'de verilen yöntemlerle karşılaştırılmış ve sonuçlar Tablo 1'de sunulmuştur. Tabloda LS ile gösterilen yöntem (14)'ün $\lambda = 0$ olma durumunda oluşan enküçük kareler yöntemidir. Karşılaştırma ölçütü olarak Kök Ortalama Kare Hata - Root Mean Square Error - RMSE, (15)'te cebirsel ifadesi verilen Yeniden Yapılanma Sinyal Hatası - Signal to Reconstruction Error - SRE ve algoritmaların 100 katışım pikselini çözümlerken harcadıkları süreler kullanılmıştır.

$$\text{SRE(dB)} = 10 \log_{10} \frac{\|x\|^2}{\|x - \hat{x}\|^2} \quad (15)$$

Tablo 1'e bakıldığında, CVX'in iyi sonuçlar elde edebildiğini söyleyebiliriz. Özellikle gürültü seviyesinin az olduğu durumda (SNR = 125 dB) gerçek bolluk değerlerine çok yakın sonuçlar üretebildiği görülmektedir. Ancak CVX'in problemin çözümlenmesinde ihtiyaç duyduğu zaman diğer yöntemlere göre oldukça fazladır. Bunun sebebi katışım problemini piksel piksel çözümlenmesidir.

Seyrek bağlanım yöntemlerinin \mathbf{D} sözlüğü içerisindeki hangi son elemanları ve bu son elemanları seyrek gösterim vektörü içerisinde hangi oranla bulduklarını görselleştirmek için Hinton diyagramları kullanılmıştır. Hinton diyagramları, bir matrisin

değerleri görselleştirmek için yapay sinir ağları alanında sıklıkla kullanılmaktadır. Matris değerlerinin büyüklüğüyle orantılı bir şekilde diagram içerisindeki hücrelerin kapladığı alan büyüyüp küçülmektedir. SNR = 25 dB iken üretilen katışım piksellerin seyrek bağlanım yöntemleri sonucunda çözümlenmesiyle elde edilen seyrek gösterim vektörleri Şekil 4'te gösterilmiştir. Şekil 4'te yer alan grafiklerin her birinde x eksenini pikselleri ifade ederken, y eksenini sözlük içerisindeki hangi son elemanların piksel içerisinde katışım halinde olduğunu göstermektedir. SNR = 125 dB iken üretilen Hinton diyagramları ise Şekil 5'te verilmiştir. Hinton diyagramlarına bakıldığında, LS'nin iki farklı gürültü seviyesinde oldukça yanlış sonuçlar verdiği görülmektedir. LS yöntemi bolluk değerleri üzerinde herhangi bir kısıt koymadığı için seyrek çözümden ziyade yoğun çözüm üretmiştir. Şekil 4'te, gürültünün işaretteki varlığı fazla iken seyrek bağlanım yöntemleri doğru son eleman değerlerine karşılık gelen katsayı değerlerini baskın bir şekilde bulabilse de katışım piksellerinin başka son elemanlar içerebileceğini de söylemektedir. Yani bağlanım yöntemleri seyrek gösterim vektörlerinin değerlerini yeterince sıfıra yakınsanamamıştır. Şekil 5'te verilen grafikler incelendiğinde ise gürültü seviyesi az iken, LS haricindeki seyrek bağlanım yöntemleri katışım piksellerinde hangi son elemanların yer aldığını başarılı bir şekilde bulabilmiştir. Ayrıca, bu son elemanların katışım değerlerini oldukça yüksek bir doğrulukla kestirebilmiştir.

5. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada, seyrek kodlama yöntemlerinden biri olan temel takip algoritmasından türetilen seyrek bağlanım yöntemlerinin spektral ayrıştırma problemine çözüm getirebileceği incelenmiştir. Bölüm 4'te karşılaştırmalı analizleri yapılan yöntemler başarılı bir şekilde seyrek ayrıştırma problemini giderebilmiştir. Sınır kısıtlı enküçük kareler yönteminin bu yöntemlerle benzer sonuçlar verdiği görülmüştür. Ancak çözümlenme işlemi piksel piksel yapıldığı için diğer yöntemlere göre oldukça zaman almaktadır. Seyrek bağlanım yöntemleri veri içerisindeki piksellerin sabit sayıda karıştığı varsayımda bulunmaktadır. Sınır kısıtlı enküçük kareler yöntemi piksel başına çözümlenme yaptığı için piksellerin değişen sayıda son elemanların katışımını halinde bulunduğu durumlarda da başarılı bir şekilde çözümlenme yapabilecektir.

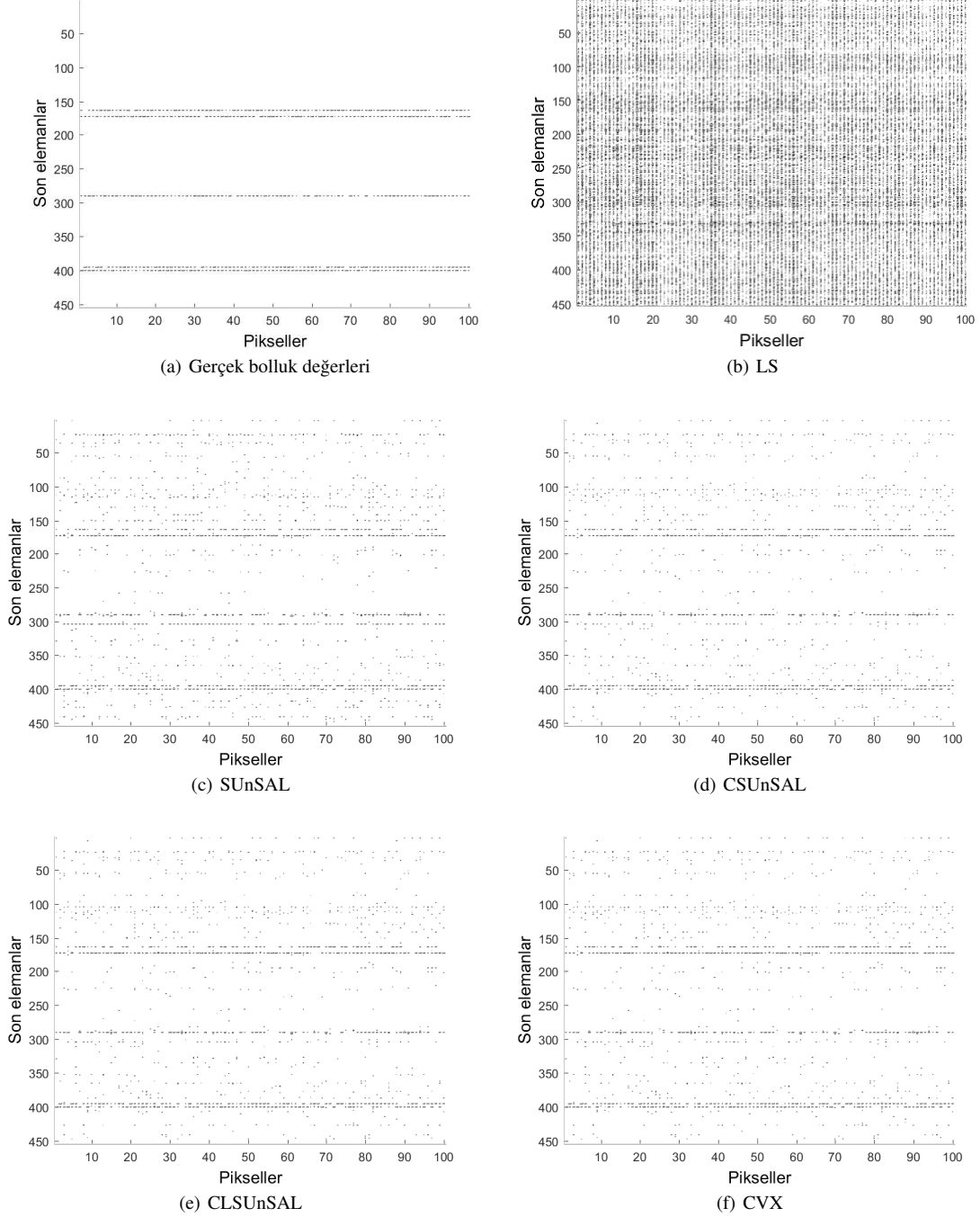
Seyrek bağlanım yöntemleri katışım piksellerini çözümlerken spektral kütüphanelerin oluşturmuş olduğu sözlük atomlarını kullanmaktadır. Spektral kütüphanelerin sunmuş olduğu materyallere ait imzaların çeşiti ve sayısı her geçen gün farklılaşsa da, bir katışım pikselinin spektral kütüphane içerisinde yer almayan bir son eleman barındırması ihtimal dahilindedir. Bu çalışmada, katışım pikselinde yer alan son elemanların sözlük atomları içerisinde yer almadığı durumlarda seyrek bağlanım yöntemlerinin başarımına dair bir çalışma yapılmamıştır. Ancak katışımda yer alan hedef pikselin sözlük atomlarından biri olmadığı durumlarda, seyrek bağlanım yöntemlerinin sözlük atomları içerisindeki en yakın son elemana ait spektral imzayı hedef imza olarak seçeceği öngörülebilmektedir.

KAYNAKLAR

Akhtar, Naveed, Shafait, Faisal, Mian, Ajmal, 2015. Futuristic greedy approach to sparse unmixing of hyperspectral data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 53, 2157–2174.

	SNR = 25 dB			SNR = 75 dB			SNR = 125 dB		
	RMSE	SRE(dB)	Zaman(sn)	RMSE	SRE(dB)	Zaman(sn)	RMSE	SRE(dB)	Zaman(sn)
LS	592.7	-43.33	0.01	3.57	0.61	0.01	3.12	3.43	0.01
SUnSAL	1.92	6.71	1.96	1.76	10.30	0.83	0.08	36.88	0.43
CSUnSAL	1.43	10.09	1.62	0.10	34.18	0.73	0.01	54.26	0.45
CLSunSAL	1.42	10.18	2.18	0.03	44.19	2.09	0.002	66.11	1.49
CVX	1.43	10.09	103.75	0.08	35.97	101.09	0.0001	90.71	119.27

Tablo 1. Seyrek bağlanım yöntemlerinin karşılaştırılması

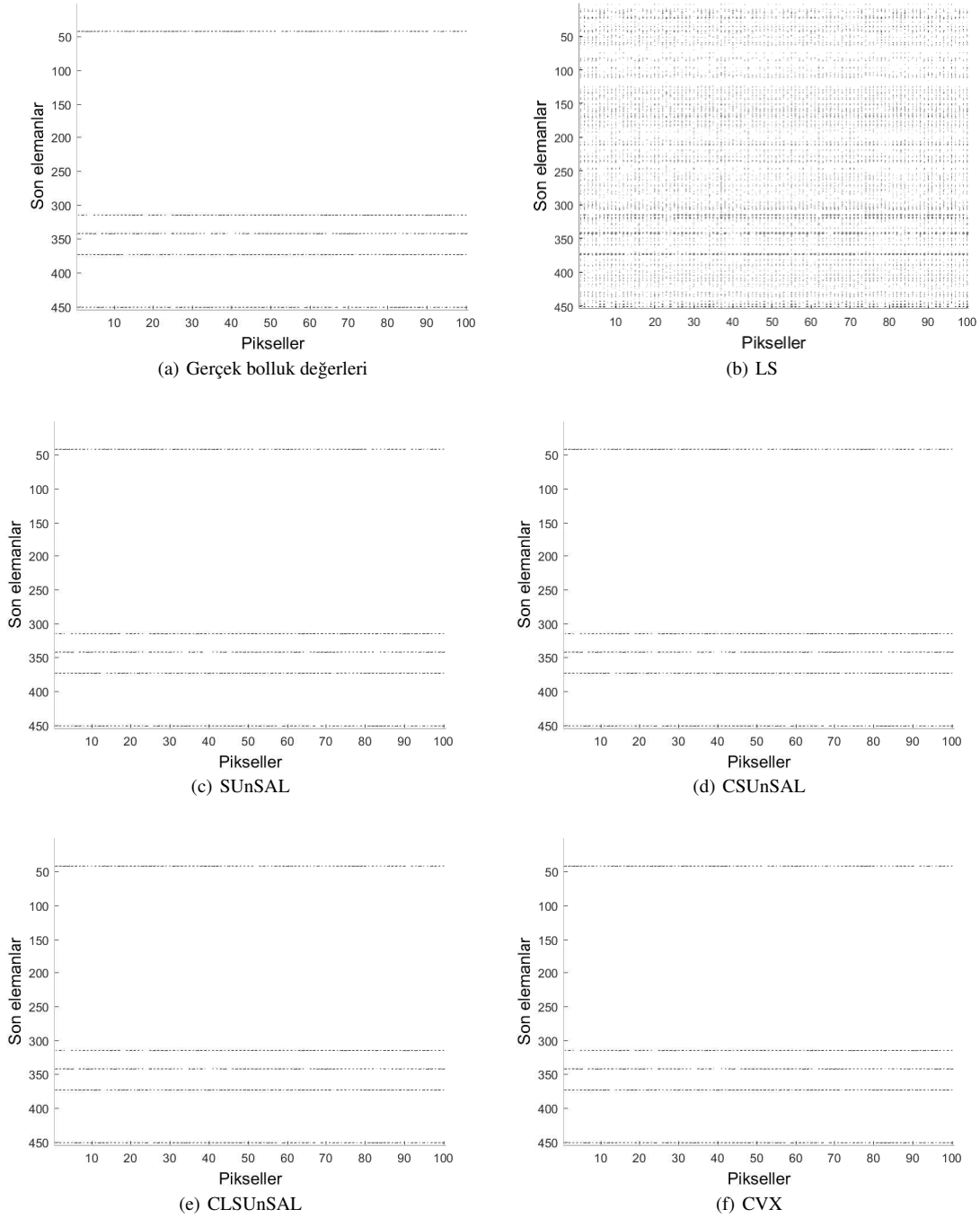


Şekil 4. Katışım piksellerini oluşturan \mathbf{D} sözlüğü içerisindeki her son eleman için kestirilen bolluk değerleri. (Sonuçlar SNR=25 dB için üretilen katışım pikselleri için geçerlidir)

Berman, Mark, Kiiveri, Harri, Lagerstrom, Ryan, Ernst, Andreas, Dunne, Rob, Huntington, Jonathan F, 2004. ICE: A statistical approach to identifying endmembers in hyperspectral

images. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*.

Bioucas-Dias, José M, Figueiredo, Mário AT, 2010. Alternating



Şekil 5. Katılım piksellerini oluşturan \mathbf{D} sözlüğü içerisindeki her son eleman için kestirilen bolluk değerleri. (Sonaçlar SNR=125 dB için üretilen katılım pikselleri için geçerlidir)

direction algorithms for constrained sparse regression: Application to hyperspectral unmixing. *Hyperspectral Image and Signal Processing: Evolution in Remote Sensing (WHISPERS), 2010 2nd Workshop on*, IEEE, 1–4.

Bioucas-Dias, José M, Plaza, Antonio, Dobigeon, Nicolas, Parente, Mario, Du, Qian, Gader, Paul, Chanussot, Jocelyn, 2012. Hyperspectral unmixing overview: Geometrical, statistical, and sparse regression-based approaches. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 5, 354–379.

Boardman, Joseph W, Kruse, Fred A, Green, Robert O, 1995.

Mapping target signatures via partial unmixing of AVIRIS data.

Chen, Scott Shaobing, Donoho, David L, Saunders, Michael A, 2001. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM review*, 43, 129–159.

Elad, M, 2010. *Sparse and redundant representations: from theory to applications in signal and image processing*.

Grant, Michael, Boyd, Stephen, 2014. CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.1. <http://cvxr.com/cvx>.

Heylen, Rob, Parente, Mario, Gader, Paul, 2014. A review

- of nonlinear hyperspectral unmixing methods. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 7, 1844–1868.
- Iordache, Marian Daniel, Bioucas-Dias, José M, Plaza, Antonio, 2011. Sparse unmixing of hyperspectral data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 49, 2014–2039.
- Iordache, Marian-Daniel, Bioucas-Dias, José M, Plaza, Antonio, 2014. Collaborative sparse regression for hyperspectral unmixing. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 52, 341–354.
- Keshava, Nirmal, Mustard, John F, 2002. Spectral unmixing. *IEEE Signal Processing Magazine*, 19, 44–57.
- Küçük, Sefa, 2015. Uzun dalga kızılötesi hiperspektral görüntülerde hedef tespiti. Master's thesis, Hacettepe üniversitesi, Ankara, Türkiye.
- Kokaly, Raymond F, Clark, Roger N, Swayze, Gregg A, Livo, K Eric, Hoefen, Todd M, Pearson, Neil C, Wise, Richard A, Benzel, William M, Lowers, Heather A, Driscoll, Rhonda L et al., 2017. Usgs spectral library version 7. Technical report, US Geological Survey.
- Li, Jun, Bioucas-Dias, José M, 2008. Minimum volume simplex analysis: A fast algorithm to unmix hyperspectral data. *Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2008. IGARSS 2008. IEEE International*, 3, IEEE, III–250.
- Mallat, Stéphane, Zhang, Zhifeng, 1993. Matching pursuit with time-frequency dictionaries. Technical report, Courant Institute of Mathematical Sciences New York United States.
- Nascimento, José MP, Dias, José MB, 2005. Vertex component analysis: A fast algorithm to unmix hyperspectral data. *IEEE transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 43, 898–910.
- Papayan, Vardan, Romano, Yaniv, Sulam, Jeremias, Elad, Michael, 2018. Theoretical foundations of deep learning via sparse representations: A multilayer sparse model and its connection to convolutional neural networks. *IEEE Signal Processing Magazine*, 35, 72–89.
- Pati, Yagyensh Chandra, Rezaifar, Ramin, Krishnaprasad, Perinkulam Sambamurthy, 1993. Orthogonal matching pursuit: Recursive function approximation with applications to wavelet decomposition. *Signals, Systems and Computers, 1993. 1993 Conference Record of The Twenty-Seventh Asilomar Conference on*, IEEE, 40–44.
- Toker, Kemal Gürkan, Yüksel, Seniha Esen, 2018. A greedy algorithm for sparse unmixing. *2018 26th Signal Processing and Communications Applications Conference (SIU)*, IEEE, 1–4.
- Winter, Michael E, 1999. N-findr: An algorithm for fast autonomous spectral end-member determination in hyperspectral data. *Imaging Spectrometry V*, 3753, International Society for Optics and Photonics, 266–276.
- Yüksel, Seniha Esen, Kucuk, Sefa, Gader, Paul D, 2016. SPICEE: An Extension of SPICE for Sparse Endmember Estimation in Hyperspectral Imagery. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 13, 1910–1914.
- Zare, Alina, Gader, Paul, 2007. Sparsity promoting iterated constrained endmember detection in hyperspectral imagery. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 4, 446–450.
- Zhang, Zheng, Xu, Yong, Yang, Jian, Li, Xuelong, Zhang, David, 2015. A survey of sparse representation: algorithms and applications. *IEEE Access*, 3, 490–530.